[SECCIÓN 1] **3 Las Variables Aleatorias**

La modelización de los experimentos aleatorios es una parte fundamental para poder generalizar el análisis del cálculo de probabilidades. Es por ello que es necesario establecer criterios que permitan construir este tipo de modelos.

Por ejemplo, al considerar el experimento aleatorio que consiste en seleccionar dos personas dentro de un grupo de cinco candidatos (Hugo, Martín, Camila, Sara y Olga).

El espacio muestral es:

Si se define X: como el número de mujeres que hay en la muestra seleccionada, es posible asignar a cada elemento del espacio muestral un valor numérico.

[SECCIÓN 2] **3.1 Las Variables Aleatorias Discretas**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de variable aleatoria** |
| **Contenido** | Una **variable aleatoria** es una función que se construye sobre el espacio muestral de un experimento aleatorio.  Dicha función tiene su dominio en el espacio muestral y su codominio en los números reales.  En otras palabras, una variable aleatoria establece un conteo específico sobre los elementos del espacio muestral.  Generalmente las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas equivalentes al manejo algebraico |

En el ejemplo, se puede establecer a cada elemento del espacio muestral una imagen correspondiente:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Evento | Imagen |  | Evento | Imagen |
| *(H,M)* | X(*H,M)=0* |  | *(M,S)* | 1 |
| *(H,C)* | 1 |  | *(M,O)* | 1 |
| *(H,S)* | 1 |  | *(C,S)* | 2 |
| *(H,O)* | 1 |  | *(C,O)* | 2 |
| *(M,C)* | 1 |  | *(S,O)* | 2 |

Se puede ver que la variable aleatoria X toma valores 0,1 y 2.

Para cada experimento aleatorio es posible definir distintas variables aleatorias. En el ejemplo, se puede definir la variable Y como el número de hombres que hay en la muestra.

En ese caso,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Evento | Imagen |  | Evento | Imagen |
| *(H,M)* | Y(*H,M)=2* |  | *(M,S)* | 1 |
| *(H,C)* | 1 |  | *(M,O)* | 1 |
| *(H,S)* | 1 |  | *(C,S)* | 0 |
| *(H,O)* | 1 |  | *(C,O)* | 0 |
| *(M,C)* | 1 |  | *(S,O)* | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Variables aleatorias discretas y continuas** |
| **Contenido** | Para el caso del experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda hasta que salga cara, el experimento aleatorio es:  Si se define la variable aleatoria Z como el número de lanzamientos necesario para llegar a la cara.  Para este caso, la variable Z toma valores en los números naturales. Es decir Z:0,1,2,3,…  En este caso se dice que la variable aleatoria es **Discreta**.  En otro caso, se selecciona aleatoriamente una persona de una muestra determinada y se mide el tiempo de reacción ante un estímulo. La variable aleatoria X, mide el tiempo que tarda en reaccionar la persona seleccionada una vez se ha aplicado el estímulo. En este caso la variable X se mide en un intervalo cerrado *[0,t]* donde t es el máximo tiempo esperado para reaccionar al estímulo. En este caso se dice que la variable aleatoria es **continua**. |

[SECCIÓN 3] **3.1.1 Función de distribución de probabilidades**

Una vez se ha definido una variable aleatoria discreta sobre el espacio muestral, es posible definir una función que permita calcular las probabilidades de ocurrencia en el experimento aleatorio.

La probabilidad de que una batería continúe funcionando después de un año de uso es de 0.3. Se inspecciona un lote de cuatro baterías que han tenido un año de uso y se prueban una a una para determinar si continúa funcionando o no.

El espacio muestral, si se considera B: Buena y D: Defectuosa, es

Sea *X* la variable aleatoria que mide el número de baterías defectuosas en la muestra. Por lo cual *X=0, 1, 2, 3, 4*

Para el caso BBBB, la variable aleatoria toma el valor 0.

Se puede calcular es decir, la probabilidad de que no hayan baterías defectuosas en el lote.

Ya que *P(B)=0.3*, entonces *P(D)=0.7*.

Además, si se asume el principio de independencia, entonces .

En consecuencia , ya que sólo hay un resultado posible para X=0 en el espacio muestral

Si se considera el caso X=1, se tienen 4 posibles resultados en el espacio muestral: .

Por tanto,

De igual forma, es posible calcular el de la probabilidad para cada uno de los valores de la variable.

|  |  |
| --- | --- |
| *Si X=0* |  |
| *Si X=1* |  |
| *Si X=2* |  |
| *Si X=3* |  |
| *Si X=4* |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de Función de Distribución** |
| **Contenido** | Sea X una variable aleatoria discreta, se define la **función de distribución de probabilidades, *f(X)*** como:  Para todos los valores *i* que toma la variable aleatoria |

Para el caso del ejemplo anterior,

Esta función puede ser representada en un histograma de probabilidades, como se muestra en la gráfica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Histograma de probabilidades de la variable aleatoria X |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | El histograma de probabilidades de la variable se construye a partir de la gráfica de puntos que genera la gráfica de la función *f(x)* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Introducción a la notación** |
| **Contenido** | En el campo de las variables aleatorias es común encontrar la notación en términos funcionales. Es por ello que, la notación:  De allí que es usual relacionar el lenguaje delas desigualdades. Por ejemplo: al menos, a lo más, a lo sumo, máximo, no mayor de, entre. |

En el ejercicio anterior, es posible hallar la probabilidad de que en la muestra de cuatro baterías, al menos tres sean defectuosas. Para tal fin se debe calcular:

En este caso, también es posible calcularse como:

Si se usa la propiedad del cálculo de la probabilidad del complemento de un conjunto.

[SECCIÓN 3] **3.1.2 Función de distribución acumulada de probabilidades**

Es usual que para el cálculo de probabilidades de una variable aleatoria sea más eficiente el uso no de los complementos, ya que facilita el proceso. Es por ello que se construye la función acumulada de probabilidades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de función de distribución acumulada de probabilidades** |
| **Contenido** | Dada una variable aleatoria discreta con *X=0,1,2,…,n*, con función de distribución de distribución *f(x)*, se define la **Función de Distribución Acumulada de Probabilidades de X, F(x)** como:  Para todo |

Para el ejemplo de las baterías, la función acumulada de probabilidades se construye de la siguiente forma:

|  |  |
| --- | --- |
| Si |  |
| Si |  |
| Si |  |
| Si |  |
| Si |  |

Una de las principales características de la función acumulada de probabilidades es que la función acumulada en el último valor de la variable debe ser 1.

En términos funcionales, la función se expresa:

Luego, la función se define para todos los valores reales de x. Esta función permite generalizar el modelo del cálculo de probabilidades para cualquier valor real. Además, se trata de una función definida a trozos.

La gráfica de la función es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Gráfica de la función acumulada de probabilidades de F(x) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | Es de notar que la gráfica tiene el mismo número de trozos como valores de la variable aleatoria. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Cómo usar F(x) para calcular probabilidades** |
| **Contenido** | El uso de la función acumulada de probabilidades para calcular valores de la variable debe fundamentarse en la siguiente relación:  Para cualquier par de valores a y b que estén en el rango de la variable aleatoria. |

Para el ejemplo, la probabilidad de que entre una y tres baterías estén defectuosas es:

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Valor Esperado**

Otro de los componentes de una variable aleatoria es el valor esperado. El cual pretende calcular el promedio ponderado de la variable de acuerdo a las probabilidades asociadas a los valores de la variable.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de valor esperado** |
| **Contenido** | Dada una variable aleatoria X=0,1,2,…n, con función de distribución *f(x),* se define el **Valor Esperado de X,**  , como: |

Para el caso del ejemplo de las baterías, la función de distribución:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| *f(x)* | *0.0081* | *0.0756* | *0.2646* | *0.4116* | *0.2407* |

El valor esperado es:

Es necesario aclarar que el valor esperado tiene unidades y corresponde a las mismas en las cuales se mide la variable.

E valor esperado tiene la misma interpretación de la media. En el caso de las variables aleatorias, se define el valor esperado como la media poblacional.

En este caso la interpretación correspondiente es. Se espera que en un lote de 4 baterías que tienen un año de uso y cuya probabilidad de que una funcione correctamente es de 0.3, salgan 2.8 defectuosas.

Como el valor esperado es poblacional, no debe aproximarse. En caso de querer una interpretación más contextualizada, es posible amplificar las unidades hasta conseguir que sean enteras. Para este caso se puede decir que en un lote de 40 baterías con esas condiciones, se espera que 28 salgan defectuosas.

[SECCIÓN 3] **3.1.4 Varianza**

Ya que se definió la media poblacional o valor esperado, es posible definir una medida de dispersión que permita determinar la validez de futuras conclusiones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de varianza** |
| **Contenido** | Dada una variable aleatoria X=0,1,2,…n, con función de distribución *f(x),* y valor esperado *E(x)* se define la **Varianza de X,**  , como:  Es posible mostrar que , por lo cual V(x) siempre es un valor positivo. |

Para el caso de las baterías, si:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|  | *0* | *1* | *4* | *9* | *16* |
| *f(x)* | *0.0081* | *0.0756* | *0.2646* | *0.4116* | *0.2407* |

Como:

Entonces:

La varianza poblacional no tiene interpretación y sus unidades son cuadradas.

[SECCIÓN 2] **3.2 Distribución Binomial**

Es posible crear modelos de variables aleatorias que se ajusten a diferentes contextos y que faciliten el cálculo de probabilidades. Una de las variables aleatorias más comunes es la Distribución Binomial.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Características de una variable aleatoria binomial** |
| **Contenido** | Una variable aleatoria se llama binomial si cumple con las siguientes características:   * El experimento aleatorio se llama dicotómico o de Bernoulli, es decir que la variable solo puede tomar dos valores. Para este contexto los denominaremos Éxito o Fracaso.   Vale la pena mencionar que el fracaso no tiene una interpretación ética que implica algo negativo   * Se conoce la probabilidad de Éxito denotada *p* * Si se define *q* como la probabilidad de fracaso, se tiene que: * El experimento aleatorio se repite un número finito de veces. Generalmente se denota el número de repeticiones como *n.* Se tiene que x=0,1,2,…,n * Las repeticiones del experimento son independientes entre sí. * La variable X mide el número de éxitos que hay en n repeticiones del experimento aleatorio |

Si en un determinado contexto es posible determinar que las cinco características se cumplen, es posible afirmar que el experimento aleatorio es binomial.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La distribución binomial** |
| **Contenido** | Sea *X* una variable aleatoria binomial, entonces la función de distribución de probabilidades es:  Donde:  n es el número de repeticiones  p es la probabilidad de éxito  q es la probabilidad de fracaso |

Un ejemplo de aplicación de la distribución binomial es: La probabilidad de que una persona adquiera un determinado virus cuando se expone mucho tiempo al sol es de 0.25. Si se seleccionan 8 personas que se han expuesto al sol, cuál es la probabilidad de que tres de ellos contraiga en virus?

En este caso la variable aleatoria mide si la persona contrae o no el virus. Por lo cual es una variable dicotómica.

Se conoce la probabilidad de que contraiga el virus, luego p=0.25.

En consecuencia, es posible hallar q:

El experimento se repite 8 veces.

Se supone la independencia, es decir que el hecho de que una persona contraiga o no el virus, no influye sobre el hecho que la otra persona lo haga o no.

En consecuencia, X es una variable aleatoria binomial, donde:

Entonces, la probabilidad de que tres personas de las ocho contraigan el virus es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Valor esperado y varianza de la distribución binomial** |
| **Contenido** | Sea X una variable aleatoria binomial con función de distribución  Entonces: |

En el ejemplo de las personas que se exponen al sol se tiene que:

Es decir que, se espera que entre las 8 personas dos de ellas contraigan el virus.

[SECCIÓN 2] **3.3 Variables aleatorias continuas**

Las variables aleatorias continuas están directamente relacionadas con las variables cuantitativas en un estudio estadístico. Su aplicación es de gran utilidad ya que su estudio se fundamenta en las herramientas construidas en el cálculo infinitesimal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de Variable Aleatoria Continua** |
| **Contenido** | Sea X definida en un intervalo cerrado [a,b], si existe una función f(x) que cumple con las siguientes condiciones:   * f(x) es positiva en el intervalo [a,b] * El área bajo la curva en el intervalo [a,b] es 1   Entonces:  X es una variable aleatoria continua y f(x) se llama la función de distribución de probabilidades de x |

De la definición es importante aclarar que, a diferencia de las variables aleatorias discretas, es necesario que se defina una función real que cumpla con los dos requisitos para definir la variable aleatoria.

[SECCIÓN 2] **3.4 Distribución Uniforme**

Una de las variables aleatorias más sencillas, y frecuentemente usada en el campo del muestreo, es la distribución uniforme

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La Distribución Uniforme** |
| **Contenido** | Sea x definida en el intervalo [a,b], si  Entonces x es una variable aleatoria continua con función de distribución Uniforme.  Además, |

La gráfica de la distribución uniforme es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** |  |
| **Descripción** | Gráfica de la distribución uniforme |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://pro.arcgis.com/es/pro-app/tool-reference/data-management/GUID-3CC0E179-1226-49E7-8D1F-0AC476ED8C23-web.gif |
| **Pie de imagen**  **Inferior** | La distribución uniforme corresponde a la función lineal constante, definida en el intervalo [a,b]. |

Por ejemplo, dada una variable aleatoria con función de distribución uniforme, por lo tanto:

El cálculo de probabilidades se reduce a calcular el área de los rectángulos que se forman.

Es decir que:

Para valores c y d que pertenecen al intervalo [a.b]

En el ejemplo:

[SECCIÓN 2] **3.4 Distribución Normal**